

SS 2007, Stochastik IV: Übungsblatt 5

Aufgabe 1

Teilaufgabe (a). Wegen $\text{cov}(Ax + a, By + b) = A\text{cov}(x, y)B'$ gilt:

$$\text{cov}(y_i, y_j) = \text{cov}(e'_i x, e'_j x) = e'_i \text{cov}(x, x) e_j = \lambda_j [e_i, e_j]$$

($[\cdot, \cdot]$: Skalarprodukt).

Teilaufgabe (b). Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \text{var}(x_i) &= \sum_{i=1}^p \sigma_{ii} \\ &\stackrel{\text{Blatt 4, Aufg. 2}}{=} \sum_{i=1}^p \lambda_i \\ &\stackrel{\text{(a)}}{=} \sum_{i=1}^p \text{var}(y_i). \end{aligned}$$

Teilaufgabe (c). Wegen $\text{cov}(\sum a_i X_i, \sum b_j Y_j) = \sum \sum a_i b_j \text{cov}(X_i, Y_j)$ gilt:

$$\begin{aligned} \rho(y_i, x_k) &\stackrel{\text{(a)}}{=} \frac{\text{cov}(e'_i x, x_k)}{\sqrt{\lambda_i} \sqrt{\text{var}(x_k)}} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^p e_{ji} \text{cov}(x_k, x_j)}{\sqrt{\lambda_i} \sqrt{\text{var}(x_k)}} \\ &= \frac{(\sum_x e_i)_k}{\sqrt{\lambda_i} \sqrt{\text{var}(x_k)}} \\ &= \frac{\sqrt{\lambda_i} e_{ki}}{\sqrt{\text{var}(x_k)}} \end{aligned}$$

$((\sum_x e_i)_k)$: k -te Element des Spaltenvektors $\sum_x e_i$.

Aufgabe 2

Teilaufgabe (a). Die Korrelationsmatrix R von x ist gleich der Kovarianzmatrix Σ_z der standardisierten Variablen z (siehe unten). Daher entspricht die Spektralzerlegung der Korrelationsmatrix von x der Spektralzerlegung der Kovarianzmatrix von z . Eine Hauptkomponentenanalyse basierend auf der Korrelationsmatrix von x meint die Hauptkomponentenanalyse

basierend auf der Kovarianzmatrix von z , gemäß vorheriger Aufgabe 1, für die Setzung $x := z$. Genauer gesagt: Die Hauptkomponenten sind $y_i := e_i'z$ ($1 \leq i \leq p$), wobei e_i paarweise orthonormale Eigenvektoren zu den Eigenwerten λ_i von Σ_z sind.

Zu zeigen: $R = \Sigma_z$. Wegen $\text{cov}(x_i - E(x_i), x_j - E(x_j)) = \text{cov}(x_i, x_j)$ gilt:

$$\text{cov}(z_i, z_j) = \frac{\text{cov}(x_i - E(x_i), x_j - E(x_j))}{\sqrt{\text{var}(x_i)}\sqrt{\text{var}(x_j)}} = \rho(x_i, x_j).$$

Teilaufgabe (b). *Ad i.* Nach Teilaufgabe (b) von Aufgabe 1 gilt:

$$\sum_{i=1}^p \text{var}(y_i) = \sum_{i=1}^p \text{var}(z_i) = p.$$

(Beachte, dass hier ebenso $\text{var}(y_i) = \lambda_i$, wobei λ_i ein Eigenwert von Σ_z ist.)
Ad ii. Nach Teilaufgabe (c) von Aufgabe 1 gilt:

$$\rho(y_i, z_k) = \frac{\sqrt{\lambda_i} e_{ki}}{\sqrt{\text{var}(z_k)}} = \sqrt{\lambda_i} e_{ki}.$$