



## Wahrscheinlichkeitstheorie

### Übungsblatt 6

**Abgabe:** Mittwoch, 30.11.05, 14:00 Uhr, Briefkasten: Wahrscheinlichkeitstheorie.  
Insgesamt können maximal 25 Punkte erreicht werden.

1. Bezeichne  $X$  die Lebensdauer einer Fernsehbiröhre mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{für } x > 0, \lambda > 0$$

Bestimme folgende Wahrscheinlichkeiten:

- (a)  $P(j < X \leq j + 1)$ , für  $j = 0, 1, 2, 3, \dots$
  - (b)  $P(X > s)$  für  $s > 0$
  - (c)  $P(X > s + t | X > s)$  für  $s, t > 0$
  - (d) Falls  $P(X > s) = \alpha$ , so drücke man  $\lambda$  durch  $\alpha$  und  $s$  aus.
2. Eine Zufallsvariable  $X$  hat die Dichte

$$f(x) = \frac{a}{1 + x^2} \quad x \in \mathbb{R}$$

Man berechne

- (a) den Koeffizienten  $a$
  - (b) die Verteilungsfunktion von  $X$
  - (c) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $X$  in das Intervall  $[0, 1]$  fällt.
3. Sei

$$F(x) := \begin{cases} 0 & -\infty < x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \\ 1 & 1 < x < \infty \end{cases}$$

- (a) Man zeige, dass  $F$  eine Verteilungsfunktion ist, und leite die Dichte her.
  - (b)  $X$  sei eine Zufallsvariable mit stetiger, streng monotoner Verteilungsfunktion  $G$ . Man zeige, dass  $G \circ X$  die Verteilungsfunktion  $F$  hat.
  - (c) Die Zufallsvariable  $Y$  habe die Verteilungsfunktion  $F$ .  $G$  sein eine beliebige, streng monotone Verteilungsfunktion. Man zeige, dass  $G^{-1} \circ Y$  die Verteilungsfunktion  $G$  hat.
4. Die Firma "Jumpstart" stellt Autobatterien her, auf die sie 2 Jahre Garantie geben. Ihr Standardmodell kostet in der Herstellung EUR 50, und wird an die Zwischenhändler für EUR 65 weiterverkauft. Die erwartete Lebensdauer dieses Modells wurde mit 2.85 Jahren festgestellt, die Standardabweichung beträgt dabei ein halbes Jahr. "Jumpstart" verspricht, dass sie eine Batterie kostenlos austauschen, falls sie innerhalb der Garantiezeit einen Defekt zeigt.
- (a) Berechnen Sie den durchschnittlichen Gewinn pro Batterie, wenn wir annehmen können, dass die Lebensdauern der Batterien normalverteilt sind. (Wir nehmen an, dass die Austauschbatterie die Garantiezeit überlebt!)
  - (b) Zeichnen Sie die Dichtefunktion und tragen Sie die Garantiezeit ein.
  - (c) Was spricht gegen eine Normalverteilung?
5. Im Forbes Magazine werden jedes Jahr die 400 reichsten Amerikaner aufgelistet. Im Jahr 2005 ergaben sich folgende Summen in Milliarden USD:

1	Gates, William Henry III	51,0	51	Goodnight, James	4,1
2	Buffett, Warren Edward	40,0	52	Crown, Lester	4,0
3	Allen, Paul Gardner	22,5	52	Davis, Barbara	4,0
4	Dell, Michael	18,0	52	Murdock, David Howard	4,0
5	Ellison, Lawrence Joseph	17,0	52	Schmidt, Eric	4,0
6	Walton, Christy	15,7	56	Sorenson, James L	3,9
6	Walton, Jim C	15,7	56	Tisch, Preston Robert	3,9
8	Walton, S Robson	15,6	58	Schwab, Charles R	3,8
9	Walton, Alice L	15,5	59	Johnson, Charles Bartlett	3,7
10	Walton, Helen R	15,4	59	Schulze, Richard M	3,7
11	Ballmer, Steven Anthony	14,0	61	Blavatnik, Leonard	3,5
12	Anthony, Barbara Cox	12,5	61	Davidson, William Morse	3,5
12	Chambers, Anne Cox	12,5	61	Lampert, Edward S	3,5
12	Johnson, Abigail	12,5	61	Lucas, George	3,5
15	Adelson, Sheldon	11,5	65	DeVos, Richard M	3,4
16	Brin, Sergey	11,0	65	Wrigley, William Jr	3,4
16	Page, Larry E	11,0	67	Abele, John E	3,3
18	Omidyar, Pierre M	10,2	67	Jobs, Steven Paul	3,3
19	Kerkorian, Kirk	10,0	67	Lauren, Ralph	3,3
19	Mars, Forrest Edward Jr	10,0	70	Cook, William Alfred	3,2
19	Mars, Jacqueline	10,0	70	Hughes, Bradley Wayne	3,2
19	Mars, John Franklyn	10,0	72	Johnson, Rupert Harris Jr	3,1
23	Kluge, John Werner	9,0	73	Arnall, Roland	3,0
24	Icahn, Carl	8,5	73	Bass, Robert Muse	3,0
25	Redstone, Sumner M	8,4	73	Bronfman, Edgar M Sr	3,0
26	Newhouse, Donald Edward	7,5	73	Filo, David	3,0
26	Newhouse, Samuel Irving Jr	7,5	73	Lauder, Leonard Alan	3,0
28	Anschutz, Philip F	7,2	78	Greenberg, Maurice Raymond	2,8
28	Soros, George	7,2	78	Johnson, Barbara Piasecka	2,8
30	Ergen, Charles	7,1	78	Nicholas, Peter M	2,8
31	Knight, Philip H	6,9	78	Pohlad, Carl	2,8
32	Murdoch, Keith Rupert	6,7	78	Saban, Haim	2,8
33	Johnson, Edward Crosby III	6,5	83	Hillman, Henry Lea	2,7
34	Duncan, Dan L	6,0	83	Lauder, Ronald Steven	2,7
34	Perelman, Ronald Owen	6,0	83	Simons, James H	2,7
34	Taylor, Jack Crawford	6,0	83	Spielberg, Steven Allen	2,7
37	Arison, Micky	5,8	83	Stern, Leonard Norman	2,7
38	Bren, Donald L	5,7	83	Trump, Donald John	2,7
39	Broad, Eli	5,5	89	Ingram, Martha R	2,6
40	Bloomberg, Michael Rubens	5,1	89	Kroenke, Ann Walton	2,6
41	Menard, John R Jr	5,0	89	Perenchio, A Jerrold	2,6
42	Bezos, Jeffrey P	4,8	89	Wexner, Leslie Herbert	2,6
42	Rowling, Robert	4,8	93	Cohen, Steven A	2,5
44	Moore, Gordon Earle	4,6	93	Hunt, Ray Lee	2,5
45	Geffen, David	4,5	93	Kinder, Richard	2,5
45	Kaiser, George B	4,5	93	Kovner, Bruce	2,5
45	Koch, Charles De Ganahl	4,5	93	Kravis, Henry R	2,5
45	Koch, David Hamilton	4,5	93	Mitchell, George Phydias	2,5
49	Warner, H Ty	4,4	93	Rich, Robert Edward Sr	2,5
50	Perot, Henry Ross	4,2	93	Ricketts, J Joseph	2,5

- Berechnen Sie die empirische Verteilung der ersten Ziffer des Vermögens, und vergleichen Sie diese mit der theoretischen Verteilung. Stellen Sie Ihr Ergebnis graphisch dar.
- Vergleichen Sie arithmetisches Mittel der Stichprobe und den Erwartungswert der Verteilung.
- Interpretieren Sie die Ergebnisse.
- (Bonus) Wer findet den Statistiker unter den 100 reichsten Amerikanern?