K 17 Bedingte Verteilungen

$$X \sim g(x; \mu)$$

d.h. die ZV X hat eine Dichte $g(x)$ die von einem Parameter μ abhängt. z.B.

$$P(\mu = 1) = p \qquad P(\mu = 0) = 1 - p$$

$$\Rightarrow g(x) = pg(x; 1) + (1 - p)g(x; 0)$$

Wir betrachten auch μ als eine ZV.

Im allgemeinen Fall, wo μ die Dichte $h(\mu)$ hat, gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_\mu g(x; \mu)h(\mu)\mathrm{d}\mu \\ &= E_\mu[g(x; \mu)] \end{aligned}$$

17.1 Bedingte Verteilungen — Beispiele

$$(1) \quad X \sim P(\lambda) \qquad \lambda \sim \Gamma(a,b)$$

$$\begin{aligned} P(X=x) &= \int_0^\infty \frac{a^b}{\Gamma(b)} \frac{1}{\Gamma(x+1)} \lambda^{x+b-1} \, e^{-\lambda(a+1)} \mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{\Gamma(x+b)}{\Gamma(x+1)\Gamma(b)} \frac{a^b}{(a+1)^{x+b}} \end{aligned}$$

weil

$$\int_0^\infty k \, \lambda^{x+b-1} e^{-\lambda(a+1)} \mathrm{d}\lambda = 1$$

(ein Resultat aus der $\Gamma(a+1, b+x)$ Dichte)

Für $b \in \mathbb{Z}^+$ gilt

$$P(X=x) = \binom{x+b-1}{x} \left(\frac{1}{a+1}\right)^x \left(\frac{a}{a+1}\right)^b$$

eine Negativbinomialverteilung. Deshalb werden die Poissonverteilung und die NB-Verteilung für ähnliche Anwendungen benutzt.

Was ist die Dichte von $\lambda | X = x$?

$$f_\lambda(\lambda | X = x) = \frac{e^{-\lambda} \, \frac{\lambda^x}{x!} \, \frac{a^b}{\Gamma(b)} \, \lambda^{b-1} \, e^{-a\lambda}}{P(X = x)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(a+1)} w^{x+b-1}}{\Gamma(x+b)} \, (a+1)^{x+b}$$

Eine Gammaverteilung $\Gamma(a+1, x+b)$

Vorher (apriori) gilt

$$E[\lambda] = \frac{b}{a}$$

Nachher (aposteriori) gilt

$$E[\lambda | X] = \frac{b+x}{a+1}$$

$$(2) \quad X \sim N(\theta, \sigma^2) \qquad \theta \sim N(\mu_0, \tau_0^2)$$

Man kann zeigen, dass

$$X \sim N(\mu_0, \sigma^2 + \tau_0^2)$$

und

$$f(\theta|X=x) = \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\theta)}{\sigma}\right)^2} \frac{1}{\tau_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\theta-\mu_0)}{\tau_0}\right)^2}}{\int\limits_\theta}$$

$$\sim N\left(\frac{\frac{\mu_0}{\tau_0^2} + \frac{x}{\sigma^2}}{\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}},\ \frac{1}{\frac{1}{\tau_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\theta|X = x \sim N(\mu_1, \tau_1^2)$$

wo

$$\mu_1 = \mu_0 + (x - \mu_0)\frac{\tau_0^2}{\sigma^2 + \tau_0^2}$$

$$\frac{1}{\tau_1^2} = \frac{1}{\tau_0^2} + \frac{1}{\sigma^2}$$