Lehrstuhl für Rechnerorientierte Statistik und Datenanalyse, Prof. Antony R. Unwin
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

Wahrscheinlichkeitstheorie für Weihnachtsmuffel

Dieses Blatt beinhaltet einige kurze Fragen zur Intensivierung des bisherigen Stoffes. Es wird nicht korrigiert, aber ggf. in den Übungen besprochen.

1. Eine Zufallsvariable X besitze die Dichtefunktion $f(x) = 4x$. Welchen Wertebereich besitzt X,

   a) $-2 < x < 2$ b) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ c) $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$?

2. Eine Zufallsvariable Y besitze die Dichtefunktion $g(y) = \frac{1}{2}$ für $0 < y < 2$.

   a) Raten Sie den Erwartungswert für Y.
   b) Berechnen Sie die Standardabweichung von Y.

3. Nikolaus und Weihnachtsmann spielen folgendes Spiel gegeinander: In die Mütze des Nikolaus wirft jeder eine Münze. Der Nikolaus zieht dann eine Münze, und wirft sie. Fällt „Kopf", dann gewinnt er, sonst der Weihnachtsmann. Da der Nikolaus nicht verlieren kann, wirft er eine gefälschte Münze in seine Mütze, bei der sich auf beiden Seiten ein Kopf befindet — dannzieht er zufällig eine der beiden und wirft (Ziehung und Wurf seien Laplace-Experimente). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er die gefälschte Münze wirft, und somit gewinnt?

4. Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte $f(x)$ und Wertebereich $R(X)$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2] = \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[X]^2.$$

5. Welche der Funktionen ergibt eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $S = \{a_1, a_2, a_3\}$?

   a) $P(a_1) = \frac{1}{4}$, $P(a_2) = \frac{1}{3}$,$P(a_3) = \frac{1}{2}$.
   b) $P(a_1) = \frac{2}{3}$, $P(a_2) = \frac{-1}{3}$,$P(a_3) = \frac{2}{3}$.
   c) $P(a_1) = \frac{1}{6}$, $P(a_2) = \frac{1}{3}$,$P(a_3) = \frac{1}{2}$.
   d) $P(a_1) = 0$, $P(a_2) = \frac{1}{3}$,$P(a_3) = \frac{2}{3}$.

6. Knut Kniffel bekam einen neuen Würfel zu Weihnachten geschenkt, der so belegt ist, daß die geraden und ungeraden Zahlen jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten, und jede gerade Zahl im Durchschnitt doppelt so oft wie eine ungerade. Er fragt sich, mit welcher Wahrscheinlichkeit

   a) eine gerade Zahl, b) eine Primzahl, c) eine ungerade Zahl, d) eine ungerade Primzahl

   auftritt. Können Sie ihm helfen?

7. Es sei X eine stetige ZV mit Verteilungsdichte:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x + k & \text{für } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   a) Bestimmen Sie k. b) Berechnen Sie $P(1 \leq X \leq 2)$!

8. Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{für } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{für } 1 \leq x \leq \sqrt{2} \\ 1 & \text{für } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

   Plotten Sie den Graph der Dichtefunktion f von X. Welche Standardabweichung besitzt X?

9. Auf dem Weg in's Univiertel hat der Weihnachtsmann auf seinem Schlitten noch fünf Geschenke im Wert von: 100 €, 100 €, 200 €, 200 € und 300 €. Zufällig verliert er zwei Geschenke vor dem Institut für Mathematik. Sei X der Gesamtwert der verlorenen Schachteln, und Y der Wert des teureren Geschenks.

   Bestimmen Sie die

   a) Verteilung   b) Mittelwert   c) Varianz und   d) Standardabweichung

   i) von X ii) von Y iii) von $X + Y$ und iv) von $X \times Y$!

10. Sei X eine mit Parameter $\lambda = 2$ poissonverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X \geq 2)$ und $P(X = 0)$.

11. Der Nikolaus muß sich von seinem Streß erholen und entgeht dem Weihnachtsrummel auf einer einsamen Südseeinsel. Dort folgt auf einen Tag mit schönem Wetter mit Wahrscheinlichkeit $\frac{7}{8}$ wieder ein Tag mit strahlendem Sonnenschein, auf einen Tag mit schlechtem Wetter folgt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{9}$ ein Tag mit gutem Wetter. Am 23. Dezember herrscht gutes Wetter. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Wetter

    1) am 1. Weihnachtsfeiertag schlecht,
    2) am 1. und 2. Weihnachtsfeiertag gut,
    3) an Heiligabend oder am 1. Weihnachtsfeiertag gut,
    4) an Heiligabend oder am 1. oder am 2. Weihnachtsfeiertag gut ist?

12. Aus "Total Poker" von David Spanier:

    Pug erklärt: "Wenn sieben Karten ausgeteilt sind, verbleiben noch fünfundvierzig im Spiel. Unter diesen fünfundvierzig sind noch neun Pik und drei Asse, von denen jede mir zum Sieg reichen würde. Ich habe zwei Möglichkeiten, um eine dieser siegbringenden Karten zu bekommen, entweder mit der nächsten oder übernächsten Karte. DAs bedeutet vierundzwanzig Möglichkeiten bei fünfundvierzig Karten gegen einundzwanzig Chancen für Moss, **falls** er tatsächlich die beiden Königinnen hat."

    Was ist an dieser Rechnung falsch? Wie groß ist die tatsächliche Wahrscheinlichkeit, daß Pug gewinnt? Da Pokerspieler mit Odds und nicht mit Wahrscheinlichkeiten arbeiten, geben Sie Ihre Antwort auch in Odds.

13. Ein umstrittener Satz lautet:
    Die Normalverteilung existiert nur für Standardabweichungen ≥ 4, weil sonst die Dichte > 1 ist und allerseits bekannt ist, dass Wahrscheinlichkeiten nicht größer als 1 sein dürfen!
    Erläutern Sie diese Behauptung!

14. Wirtshausschlägerei
    Nach einer Wirtshausschlägerei ist im Polizeibericht folgendes zu lesen: "70% der festgenommenen Personen hatten ein blaues Auge (Ereignis A), 80% eine blutige Nase (Ereignis N)."

    a) Wieviele Personen haben mindestens sowohl ein blaues Auge als auch eine blutige Nase, wieviele können es höchstens sein?
    b) Wieviele Personen mit blauem Auge und blutiger Nase würden Sie erwarten, wenn die Ereignisse A und N unabhängig sind?

    In der Tat hatten laut Polizeinbericht 60% der Personen sowohl ein blaues Auge als auch eine blutige Nase. Außerdem war eine gewisse Anzahl von abgerissenen Ohren (Ereignis O) zu beklagen. Die Anzahl Personen, die sowohl ein abgerissenes Ohr als auch eine blutige Nase hatten, war 50%. Außerdem sei die Wahrscheinlichkeit für eine Person mit blutiger Nase mindestens eine weitere Verletzung zu erleiden 7/8.

    c) Berechnen Sie den Anteil der Personen, die ein blaues Auge, eine blutige Nase und ein abgerissenes Ohr haben.
    d) Wieviele Personen blieben unverletzt, wenn O von A von N unabhängig ist, und 80 Personen verhaftet wurden?