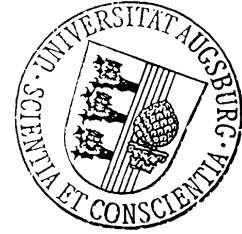


K1 Was ist Wahrscheinlichkeit?

1.1 Ereignisse

Der einzelne Ausgang ist unbekannt, aber die Menge aller möglichen Ausgänge ist bekannt.

- Elementarereignisse $\{\omega\}$
- Ereignisraum Ω
(Stichprobenraum)
- Ereignis $A \subseteq \Omega$
(Ausgang)
- Wahrscheinlichkeitsmaß P



Interpretationen

$A \cup B$ Ereignis A oder B tritt ein

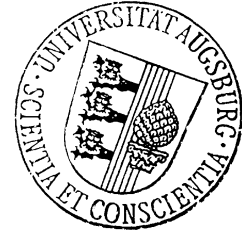
$A \cap B$ beide Ereignisse A und B treten ein

$\bigcup_{n=1} A_n$ mindestens eines von A_n tritt ein

$\bigcap_{n=1} A_n$ alle A_n treten ein

Zwei Ereignisse A und B sind disjunkt, wenn sie keine Elementarereignisse gemeinsam haben:

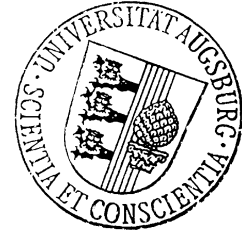
$$A \cap B = \emptyset$$



1.3 Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten

Sind die Situationen identisch?

- Kombinatorische Bestimmung
(Abzählen von Fällen)
- Statistische Schätzungen
(Wie häufig ist es vorher aufgetreten?)
- Logische Überlegungen
(Abgeleitet von Struktur)



1.4

Interpretation von Wahrscheinlichkeiten

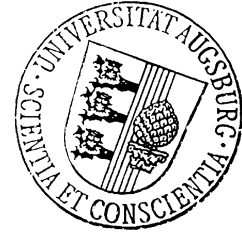
- Relative Häufigkeit

Es gibt eine unendliche Zahl von identischen Situationen, bei denen ein Ereignis A auftreten kann. Die Anzahl der n Versuche, bei denen A eintritt, heißt die absolute Häufigkeit des Ereignisses A , $h_n(A)$, und die relative Häufigkeit von A ist gleich

$$h_n(A)/n$$

Da relative Häufigkeiten, selbst bei noch so großem n , von der tatsächlichen Wahrscheinlichkeit beliebig weit entfernt sein können, gibt es Probleme.

- Subjektive Wahrscheinlichkeit



1.5 Axiome von Kolmogoroff (1933)

Eine Abbildung P von $\mathcal{P}(\Omega)$ in $[0,1]$ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

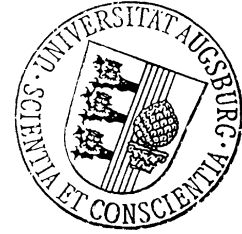
- $P(\Omega) = 1$
- $P(A) \geq 0$ für alle A
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
wenn A, B disjunkt sind

Ω ist eine nicht leere Menge der möglichen Versuchsergebnisse

\mathcal{F} ist die Menge der Ereignisse, A_1, A_2, A_3, \dots die uns interessieren.

$P(A)$ ist die Wahrscheinlichkeit von A .

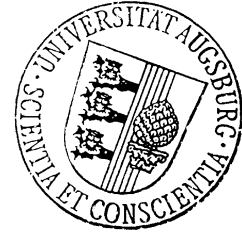
Das Tupel (Ω, \mathcal{F}, P) heißt der dem Experiment zugeordnete Wahrscheinlichkeitsraum.



1.5.1 Folgerungen aus den Axiomen

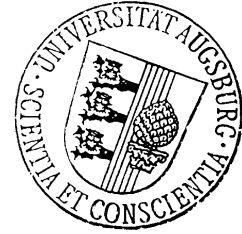
Für $A, B, A_i \in \mathcal{F}$ gilt

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- Aus $A \subset B$ folgt $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
wobei $(A \setminus B = A \cap \bar{B})$
- Wenn A_i disjunkt sind gilt
$$P(\cup A_i) = \sum P(A_i)$$
- Sonst gilt für beliebige A_1, A_2, A_3, \dots
$$P(\cup A_i) \leq \sum P(A_i)$$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



1.6 Ein bisschen Geschichte

- 3500 v.C. Astragli in Ägypten
(Hufknochen von Schafen)
- 1600 v.C. sechs-seitiger Würfel
- 1565 (?) *Liber de Ludo Aleae*
(Handbuch des Glückspiels)
Cardano (1501-1576)
- 1654 Briefwechsel Pascal-Fermat
- 1655 *De ratiocinates in Aleae Ludo*
(Zur Berechnung von Glückspielen)
Huygens (1629-1695)
- 1713 *Ars Conjectandi*
Jakob Bernoulli (1654-1705)
- 1730 *The Doctrine of Chances*
Abraham de Moivre (1667-1754)



Und...

Galileo Galilei (1564-1642)

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

Siméon Poisson (1781-1840)

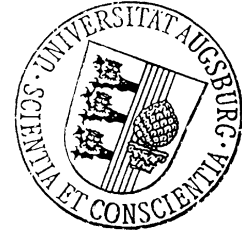
Carl Friedrich Gauß (1777-1855)

Pafnuty Chebyshev (1821-1894)

Andrei Markov (1856-1922)

Émile Borel (1871-1956)

Andrei Kolmogorov (1903-1987) löste das
Wahrscheinlichkeitsteil des sechsten
Problems von David Hilbert (Paris 1900)



1.7 Unabhängigkeit

Ereignisse A und B heißen unabhängig wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A | B) \text{ und } P(B) = P(B | A)$$

$P(A | B)$ ist die Wahrscheinlichkeit von Ereignis A gegeben Ereignis B

Dieses Konzept ist ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Konzept.

z.B.

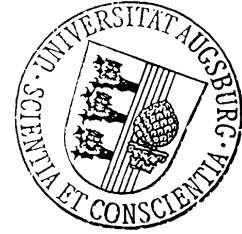
Beim Werfen eines Würfels

sei A: gerade Zahl und B: > 3

dann gelten $P(A) = 1/2$ und $P(A | B) = 2/3$

Sei A: gerade Zahl und B: > 2

dann gelten $P(A) = 1/2$ und $P(A | B) = 1/2$



Stochastische Unabhängigkeit

Wir haben schon die Unabhängigkeit von zwei Ergebnissen besprochen:

A, B unabhängig $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

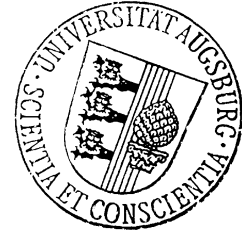
Die Verallgemeinerung ist komplizierter:

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ sind unabhängig

\Leftrightarrow

$P(\cap A_j) = \prod P(A_j)$ für jede Teilfamilie

Falls $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$ für jedes Paar A_i, A_j gelten sollte, sind $A_1, A_2, A_3, \dots, A_m$ paarweise unabhängig aber nicht unbedingt unabhängig.



Beispiel:

Beim zweimaligen Werfen einer Münze:

$$A_1 = \{1. \text{ Wurf Kopf}\}$$

$$A_2 = \{2. \text{ Wurf Zahl}\}$$

$$A_3 = \{\text{Beide verschieden}\}$$

$$P(A_1) = 1/2, P(A_2) = 1/2, P(A_3) = 1/2$$

$$P(A_1 \cap A_2) = 1/4 = P(A_1) \cdot P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = 1/4 = P(A_1) \cdot P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = 1/4 = P(A_2) \cdot P(A_3)$$

=> jedes Paar A_i, A_j ist unabhängig

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/4 \neq P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

=> A_1, A_2, A_3 sind nicht unabhängig