

K3 (Diskrete) Zufallsvariablen

3.1 Basis

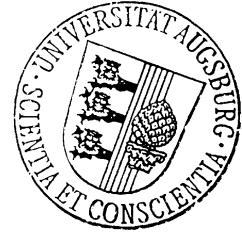
$\Omega = \{\omega\}$, $X(\omega)$ ist eine Größe die durch ω bestimmt ist. Bei der zufälligen Auswahl von ω bekommen wir den Wert, $X(\omega)$.

Definition: Ist (Ω, \mathcal{F}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine beliebige Menge, so nennen wir eine Abbildung

$X: \Omega \rightarrow X$ eine X -wertige Zufallsvariable

Falls Ω abzählbar ist, wird der Wertebereich von X , $\{X(\omega): \omega \in \Omega\}$ auch abzählbar sein. Die Verteilung von X ist das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P_X(x) = P(\{\omega \in \Omega: X(\omega) = x\})$$



3.2 Erwartungswerte

Die Erwartung einer reellwertigen Zufallsvariablen X existiert wenn $\sum |X(\omega)| P(\omega)$ konvergiert. Wir definieren dann

$E[X] = \sum X(\omega)P(\omega)$
als den Erwartungswert von X

Ist x_1, x_2, x_3, \dots eine Abzählung des Wertebereichs von X , so ist

$$E[X] = \sum x_i P(X = x_i)$$

Eigenschaften:

(1) $E[X+a] = E[X] + a$

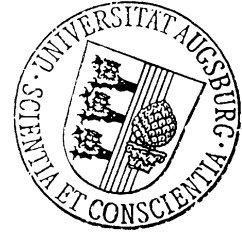
(2) $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

(3) $E[aX] = aE[X]$

(4) sind X, Y unabhängig:

$$E[X*Y] = E[X]*E[Y]$$

(5) $E[f(X)] \neq f(E[X])$



3.2.1 Warum brauchen wir Konvergenz?

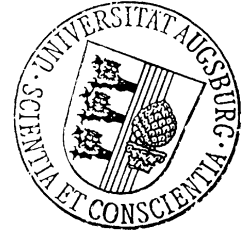
(Das Paradox von St. Petersburg)

Man wirft eine Münze bis Kopf auftritt.
Wenn das zum ersten Mal mit dem r .ten
Wurf geschieht, gewinnt man

$$€ 2^r$$

Nehmen wir an, daß $P(\text{Kopf}) = p$

$$\begin{aligned} E[\text{Gewinn}] &= \sum_{r=1}^{\infty} 2^r p (1-p)^{r-1} \\ &= 2p \sum_{r=1}^{\infty} (2q)^{r-1} \\ &= 2p \sum_{r=0}^{\infty} (2q)^r \\ &= 2p / (1 - 2q) \quad \text{für } 2q < 1 \\ &\text{sonst } \infty \end{aligned}$$



3.3 Verteilungen auf den Ganzzahlen

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$P(X = k) = p_k$$

Man interessiert sich insbesondere für

$$P(X = 0) = p_0$$

$$P(X \geq k) = \sum_{i \geq k} p_i$$

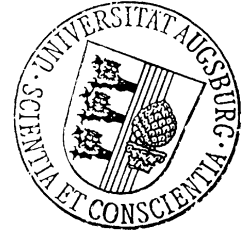
$$P(X = r \mid X \geq k) = p_r / \sum_{i \geq k} p_i$$

$$P(j \leq X \leq k) = \sum_{i=j}^k p_i$$

$$E[X] = \sum i p_i \text{ (arithmetischer Mittel)}$$

$$V[X] = \sum (i - E[X])^2 p_i$$

$$\text{Standardabweichung von } X = \sqrt{V[X]}$$



z.B.

k	p_k
0	0.2
1	0.4
2	0.3
3	0.1
≥4	0.0

$$P(X = 0) =$$

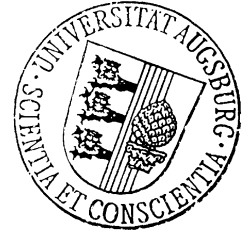
$$P(X \geq 2) =$$

$$P(X = 3 \mid X \geq 2) =$$

$$P(1 \leq X \leq 2) =$$

$$E[X] =$$

$$V[X] =$$



3.4 Hypergeometrische Verteilung

Eine Urne enthält
 S schwarze und W weiße Kugeln.

Es werden $n \leq S + W$ Kugeln ohne
Rücklegen gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit, daß die Stichprobe
genau s schwarze Kugel enthält ist

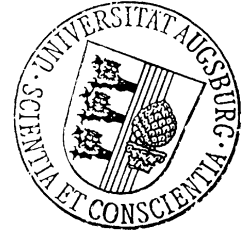
$$h(s; n, N, S) =$$

wo

$$N = S + W, n = s + w \text{ und } 0 \leq s \leq \min(n, S)$$

Für eine Urne mit mehreren Farben, z. B.
 S schwarze, W weiße, R rote, B blaue Kugeln
gilt:

$$P(s, w, r, b) =$$



3.5 Produktexperimente

Wir haben eine Reihe von unabhängigen Experimenten $\{1, 2, 3, \dots, i, \dots\}$ mit Modellen (Ω_i, F_i, P_i) . Das Gesamtergebnis hat einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, F, P) mit

$$\Omega = \prod \Omega_i, F = \prod F_i, P = \prod P_i$$

das Produkt der Wahrscheinlichkeitsräume

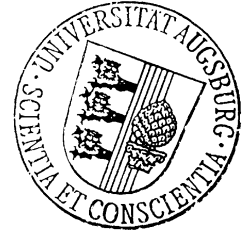
Man zieht z.B. 4 Kugeln hintereinander aus einer Urne mit 10 schwarze Kugeln und 20 weiße Kugeln.

(a) mit Rücklegen

alle 4 Experimente haben denselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω_i, F_i, P_i)

(b) ohne Rücklegen

das Resultat der zweiten Ziehung ist vom Resultat der ersten abhängig und somit ist (Ω_2, F_2, P_2) im voraus nicht bestimmbar.



Produktexperimente — Beispiele

Geometrische Verteilung

In jedem Experiment gibt es zwei mögliche Ausgänge, $\{1, 0\}$ mit Wahrscheinlichkeiten p bzw. $q (= 1-p)$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß k Nullen vor dem ersten Einser auftreten?

$$p_k = pq^k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Binomiale Verteilung

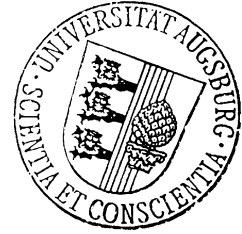
Es gibt genau N der obigen Experimente. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man k Einsen bekommt?

$$\left[\frac{N!}{k! (N - k)!} \right] p^k (1 - p)^{N-k}$$

Negative Binomiale Verteilung

Es gibt keine Begrenzung der Zahl der Experimente. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß man k Nullen vor dem r .ten Einser bekommt?

$$\left[\frac{(k + r - 1)!}{k! (r - 1)!} \right] p^r (1 - p)^k$$



3.6 Geometrische Verteilung

3.6.1 Formeln

$$p_k = pq^k \quad (q = 1 - p) \quad (3.6.1)$$

$$p_0 = p$$

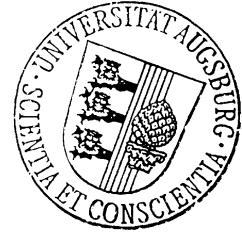
$$P(X \geq k) = \sum_{i \geq k} p_i = pq^k \sum_{i \geq 0} q^i = q^k$$

$$P(X = r \mid X \geq k) = p_r / \sum_{i \geq k} p_i = pq^{r-k}$$

$$P(j \leq X \leq k) = \sum_{i=j}^k p_i = q^j (1 - q^{k+1-j})$$

$$E[X] = \sum_{i \geq 0} ip_i = pq \sum_{i \geq 1} iq^{i-1} = q/p$$

$$V[X] = \sum_{i \geq 0} (i - E[X])^2 p_i = q/p^2$$



3.6.2 Anwendungen — Geometrische Verteilung

1) Zuverlässigkeitsmodelle

Wieviele Backups?

$$P(\text{Absturz}) = p$$

$$P(k \text{ stürzen ab}) = p^k$$

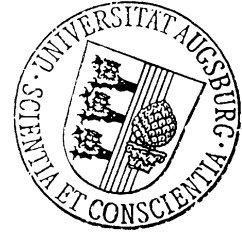
Unabhängigkeit ist eine wichtige Annahme

2) „Coupons“ Problem

$$P(\text{man bekommt den seltenen Fall}) = p$$

$$P(k + 1 \text{ kaufen müssen}) = q^k p$$

3) Zeit zum ersten Erfolg



3.7 Binomialverteilung $B(N, p)$

3.7.1 Formeln

$$p_k = N! / (k! (N-k)!) p^k q^{N-k} \quad (3.7.1)$$

$$p_0 = q^N$$

$$P(X \geq k) = \sum_{i \geq k} p_i$$

$$P(X = r \mid X \geq k) = p_r / \sum_{i \geq k} p_i$$

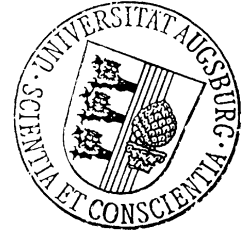
$$P(j \leq X \leq k) = \sum_{i=j}^k p_i$$

$$E[X] = \sum_{i \geq 0} i p_i = Np$$

$$V[X] = \sum_{i \geq 0} (i - E[X])^2 p_i = Npq$$

(Bernoulli Experimente)

Für N unabhängige Zufallsvariablen $\{X_i\}$,
wo $P(X_i = 1) = p$ und $P(X_i = 0) = 1 - p$,
hat $X = \sum X_i$ eine Binomialverteilung.



3.7.2 Anwendungen — Binomialverteilung

1) Qualitätskontrolle

Stichproben der Größe N . Jedes Produkt hat die gleiche Wahrscheinlichkeit, p , fehlerhaft zu sein.

2) „Multiple Choice“

N Fragen

r Antworten pro Frage $P(\text{richtig}) = 1/r$

Die Verteilung der #(richtige Antworten)

$$B(N, 1/r)$$

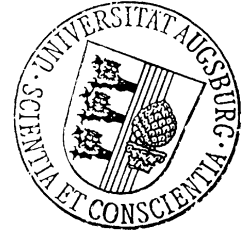
3) „ESP“

N Versuche $p = P(\text{richtig})$

$$P(X \geq k) = \sum_{i=k}^N \binom{N}{i} p^i q^{N-i} = g_k$$

M Personen $p = g_k$

$$P(\text{mehr als } K \text{ Personen } \geq k \text{ richtig haben}) = \sum_{j>K}^M \binom{M}{j} g_k^j (1 - g_k)^{M-j}$$



3.8 Negative Binomialverteilung

3.8.1 Formeln

$$p_k = (r + k - 1)! / (k! (r - 1)!) p^r q^k$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

$$p_0 = p^r$$

$$P(X \geq k) = \sum_{i \geq k} p_i$$

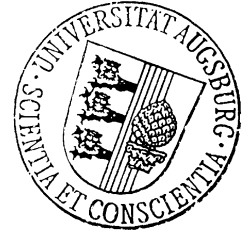
$$P(X = r \mid X \geq k) = p_r / \sum_{i \geq k} p_i$$

$$P(j \leq X \leq k) = \sum_{i=j}^k p_i$$

$$E[X] = \sum_{i \geq 0} i p_i = r q / p$$

$$V[X] = \sum_{i \geq 0} (i - E[X])^2 p_i = r q / p^2$$

(Die Summe von r geometrischverteilte Zufallsvariablen)



3.8.2 Anwendungen — Negative Binomialverteilung

1) Zählvariablen

Tore

Einkäufe

Polygynie in Afrika

...

2) Versuche / Anrufe / Einkäufe ... bis alle Objekte verkauft sind; genug Erfolge erzielt werden; eine Stichprobengruppe gefunden wird.